نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **درجه ۲**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

اگر طول نقاط A و B به‌ترتیب x_1 و x_2 باشد، داریم:

$$\begin{matrix} OA = x_1 \\ OB = x_2 \end{matrix} \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = 6 \Rightarrow x_1 + x_2 = 12$$

از طرفی $OA = AB$ پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} OA = x_1 \\ AB = OB - OA = x_2 - x_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_2 - x_1 = x_1 \Rightarrow x_2 = 2x_1$$

$$\xrightarrow{x_2=2x_1} x_1 + 2x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 8$$

$$y = k(x-6)^2 + 8 \xrightarrow[y=0]{x=4} 0 = k(4-6)^2 + 8 \Rightarrow 4k + 8 = 0$$

$$\Rightarrow k = -2 \Rightarrow y = -2(x-6)^2 + 8 \xrightarrow{x=0} y = -2 \times 36 + 8$$

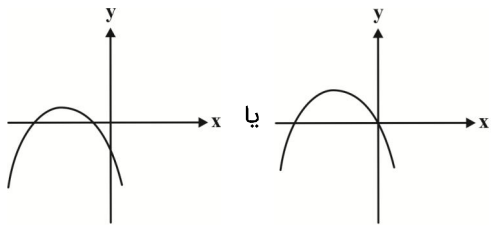
$$\Rightarrow y = -72 + 8 = -64$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

با توجه به این‌که از کلمهٔ «فقط» استفاده شده است، یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد:



ب الف

$$\begin{cases} \text{ضریب } x^2 < 0 \Rightarrow k < -1 & (1) \\ \text{ضریب } x < 0 \Rightarrow k < 0 & (2) \\ \text{ضریب ثابت} \le 0 \Rightarrow k < 1 & (3) \\ \Delta > 0 \Rightarrow 3k^2 - 4(k^2-1) > 0 \Rightarrow -2 < k < 2 & (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)\cap(4)} -2 < k < -1$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$y = \frac{۱}{k}x^{۲} - \frac{۳}{k}x - \frac{۱۰}{k}$$

به ازای x=۰ مختصات نقطهٔ B به‌صورت $(۰, -\frac{۱۰}{k})$ می‌باشد. چون عرض از مبدأ سهمی است. در نتیجه ارتفاع مثلث $h = -\frac{۱۰}{k}$ است.

قاعدهٔ مثلث یعنی ضلع AC، تفاضل محل تلاقی سهمی با محور طول‌هاست که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{تفاضل ریشه‌ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{\frac{۹}{k^{۲}} - ۴(\frac{۱}{k})(\frac{-۱۰}{k})}}{|\frac{۱}{k}|} = \frac{\sqrt{\frac{۴۹}{k^{۲}}}}{|\frac{۱}{k}|} = \frac{\frac{۷}{|k|}}{|\frac{۱}{k}|} = ۷$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \Rightarrow ۳۵ = \frac{۱}{۲} \times \frac{(-۱۰)}{k} \times ۷ \Rightarrow k = -۱$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

دهانهٔ سهمی رو به پایین است، پس $a < ۰$.

سهمی محورyها را در عرض منفی قطع کرده است، پس $c < ۰$. مجموع صفرهای تابع عددی منفی است، پس:

هر سه ضریب منفی هستند. $S < ۰ \Rightarrow -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{b}{a} > ۰ \xrightarrow{a<۰} b < ۰$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

معادلهٔ یک سهمی که رأس آن (h , k) باشد، $y = a(x - h)^{۲} + k$ است. رأس سهمی $(۱ , ۵)$ است، پس معادلهٔ سهمی را می‌توان به صورت $y = a(x - ۱)^{۲} + ۵$ نوشت. همچنین سهمی از نقطهٔ $(۰ , ۳)$ عبور می‌کند، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$۳ = a(۰ - ۱)^{۲} + ۵ \Rightarrow ۳ = a + ۵ \Rightarrow a = -۲$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y = -۲(x - ۱)^{۲} + ۵$ است.

$$y = -۲(x - ۱)^{۲} + ۵ = -۲(x^{۲} - ۲x + ۱) + ۵$$

$$= -۲x^{۲} + ۴x - ۲ + ۵ = -۲x^{۲} + ۴x + ۳$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-۴}{-۲} = ۲ \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{۳}{۲}$$

$$\alpha^{۳} + \beta^{۳} = S^{۳} - ۳P(S) = ۲^{۳} - ۳ \times (-\frac{۳}{۲})(۲) = ۸ + ۹ = ۱۷$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۱

دلیل انتخاب: یکی از ایده‌های رایج در خصوص سؤال‌های نمودار تابع درجه دو، به دست آوردن معادلهٔ تابع با استفاده از ریشه‌های آن و عرض از مبدأش می‌باشد که در سؤال‌های چهار گزینه‌ای بسیار پرکاربرد است.

صفرهای تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ به ازای $x = -۱$ و $x = -۲$ حاصل می‌شود. پس معادلهٔ آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = a(x+۱)(x+۲)$$

همچنین تابع از نقطهٔ $(۰ , -۲)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در تابع صدق می‌کند:

$$a(۰+۱)(۰+۲) = -۲ \Rightarrow ۲a = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

$$\Rightarrow y = -(x+۱)(x+۲) = -x^۲ - ۳x - ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = -۳ \\ c = -۲ \end{cases}$$

$$a - ۲b + c = -۱ - ۲(-۳) - ۲ = ۳$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی «۴»

m و n ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx - ۸a = ۰$ هستند. از معادلهٔ داده شده، حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow m \times n = \frac{-۸a}{a} \Rightarrow mn = -۸$$

با توجه به نمودار رسم شده، طول رأس یعنی میانگین دو ریشه، برابر ۲ است:

$$\frac{m+n}{۲} = ۲ \Rightarrow m + n = ۴$$
$$\Rightarrow m^۳ + n^۳ = (m+n)^۳ - ۳mn(m+n)$$
$$= (۴)^۳ - ۳(-۸)(۴) = ۶۴ + ۹۶ = ۱۶۰$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

$$P(۰) = ۱ \Rightarrow c = ۱$$

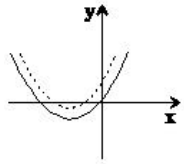
$$\left.\begin{array}{l} P(۲) = ۴a + ۲b + ۱ = -۱ \Rightarrow ۴a + ۲b = -۲ \\ \Rightarrow ۲a + b = -۱ \\ x_S = -\dfrac{b}{۲a} \Rightarrow ۲ = -\dfrac{b}{۲a} \Rightarrow -b = ۴a \\ \Rightarrow b = -۴a \end{array}\right\} \Rightarrow -۲a = -۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

$$b = -۴(\tfrac{۱}{۲}) = -۲ \Rightarrow a + b + c = \tfrac{۱}{۲} - ۲ + ۱ = \tfrac{۱}{۲} - ۱ = -\tfrac{۱}{۲}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۴

اگر نمودار سهمی $y = ۳x^۲ + ax + b$ (با توجه به مثبت بودن ضریب $x^۲$) فقط از ناحیه چهارم عبور نکند باید به صورت زیر باشد:



با توجه به نمودارهای فوق، مشخص است که عرض از مبدأ سهمی نامنفی بوده و حداقل می‌تواند صفر باشد و رأس سهمی نیز دارای طول منفی است:

عرض از مبدأ $\geq ۰ \rightarrow b \geq ۰$

طول رأس سهمی $\rightarrow x_{\text{رأس}} < ۰ \rightarrow -\frac{a}{۲\times۳} < ۰ \rightarrow a > ۰$

توجه کنید که عرض رأس سهمی باید منفی باشد، پس:

$$y_S = \frac{-\Delta}{۴a'} < ۰ \Rightarrow \frac{-a^۲+۱۲b}{۱۲} < ۰ \Rightarrow ۱۲b < a^۲$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

محل تقاطع سهمی با محورyها برابر با ۲- است. پس:

$$-b - c = -۲ \Rightarrow b + c = ۲ \qquad (۱)$$

$$x_{\text{راس}} = ۲ \Rightarrow -\frac{c-a}{۲a} = ۲ \Rightarrow c - a = -۴a \qquad (۲)$$

$$\Rightarrow c = -۳a \qquad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)\,,\,(۳)} y = ax^۲ - ۴ax - ۲$$

$$\xrightarrow{(۲\,,\,۰)\in \text{سهمی}} ۰ = ۴a - ۸a - ۲ \Rightarrow -۴a = ۲$$

$$\Rightarrow a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(۳)} c = \frac{۳}{۲} \\ \xrightarrow{(۱)} b = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b - a - c = \frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}) - \frac{۳}{۲} = ۱ - \frac{۳}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$